

# Investigaciones en educación matemática en contraste

## *Research in mathematics education in contrast*

---

GUSTAVO CARNELLI

Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina

gcarnelli@campus.ungs.edu.ar

orcid.org/0000-0002-2542-0445

**Resumen:** En el campo de la educación matemática se investiga respecto de problemáticas muy variadas y desde distintos marcos teóricos. En este artículo tomamos tres investigaciones en las que hemos participado y que expresan esta diversidad: una tesis doctoral y dos proyectos radicados en una universidad argentina. Analizamos cada una de ellas a partir de algunas dimensiones: las motivaciones que las originaron, el marco teórico elegido para el abordaje del problema y los resultados obtenidos y aportes brindados al campo de conocimiento. Consideramos que este recorrido sirve especialmente a quienes se inician en la investigación en educación matemática.

**Palabras clave:** Investigación, educación matemática, tesis, razonamiento, ingreso universitario.

**Abstract:** In the field of mathematics education, research is carried out on very varied problems and from different theoretical frameworks. In this article we take three investigations in which we have participated and that express this diversity: a doctoral thesis and two projects based in an Argentine university. We analyze each of them from some dimensions: the motivations that originated them, the theoretical framework chosen to approach the problem and the results obtained and contributions provided to the field of knowledge. We believe that this route is especially useful to those who are starting out in research in mathematics education.

**Keywords:** Research, Mathematics education, thesis, reasoning, entry.

## Introducción

La investigación en educación matemática tiene producciones realizadas desde variados marcos teóricos, acerca de problemáticas muy diversas, con investigaciones de tipo microdidácticas y de tipo macrodidácticas y con despliegues metodológicos de distinta naturaleza –aunque mayoritariamente cualitativos–. Esto es típico de un campo que ya tiene algunas décadas de recorrido, si bien se trata de una disciplina aún joven.

Ubicados en esta diversidad nos proponemos recorrer algunas investigaciones en las que hemos tenido participación, para contrastarlas, en el sentido de que veremos cómo se expresa en ellas esta variedad mencionada, a partir de algunas dimensiones de análisis elegidas. En particular, pensamos que esto puede ser un aporte para quienes se inician en la tarea de investigar. A propósito, en Carnelli (2021) puede verse una presentación de la totalidad del primero de los trabajos que elegimos para desarrollar aquí y que está escrito pensando en esos destinatarios.

Tomamos tres investigaciones en el campo de la educación matemática que se diferencian no solo en las temáticas que abordan sino también en varios otros aspectos, como las motivaciones que las generaron, los antecedentes de la investigación, la construcción del marco teórico y el tipo de resultados obtenidos y aportes realizados. Esas son las dimensiones de análisis mencionadas que hemos elegido. Aprovechamos estas diferencias para explicitarlas, detallarlas, discutir las y poner en evidencia la variedad existente en el tipo de investigaciones.

Una de las investigaciones es nuestra tesis de doctorado (Carnelli, 2014) cuyo título es: *Matemática en el ingreso a las universidades nacionales argentinas: análisis de propuestas de actividades para el aprendizaje* (en adelante, *Matemática en el ingreso*). En Argentina, el acceso al nivel superior es –a grandes rasgos– irrestricto, desde mediados de los años ochenta; ante este panorama, las distintas universidades estatales delinearon cursos de ingreso previos. Esta investigación consiste en una mirada a las actividades para el aprendizaje que se proponen en esas instancias de ingreso en el conjunto de las universidades estatales argentinas. Estuvo radicada en la Universidad de Palermo, una universidad privada de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires y fue realizada en el marco del doctorado en Educación Superior.

La segunda investigación es *La actividad matemática en la enseñanza de las integrales en funciones de una variable real* (en adelante, *Actividad matemática con integrales*). En ella se recorren manuales de Cálculo Diferencial e Integral con la intención de analizar la actividad matemática que se propone que los estudiantes desplieguen al trabajar con esos materiales. Estuvo radicada en el Instituto del Desarrollo Humano (IDH) de la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS), ubicada en la provincia de Buenos Aires, en una zona cercana a la Ciudad Autónoma de Buenos Aires: el conurbano bonaerense.

La última investigación que analizamos tiene por título *Razonamiento y Matemática en contextos sistematizados y lúdicos* (en adelante, *Razonamiento y Matemática*) en la que se estudian las formas básicas de razonamiento inferencial en matemática a las que apelan los estudiantes que se inician en los estudios universitarios y también de nivel secundario. Igual que la anterior, la radicación está en el Instituto del Desarrollo Humano de la Universidad Nacional de General Sarmiento y aún se encuentra en la instancia de cierre de los resultados y redacción del informe final.

## **Las motivaciones generadoras de la investigación**

Las motivaciones que dan origen a una investigación en educación matemática pueden ser muy variadas y, muchas veces, no suelen aparecer explícitamente en las producciones obtenidas. En ocasiones, pueden percibirse o quedan apenas sugeridas. Estas motivaciones van desde la continuidad de otra investigación en algún aspecto que resultó atractivo, hasta intereses novedosos, en el sentido que surgen de inquietudes

que, en principio, no tienen expresión en investigaciones anteriores. Algo que ocurrió en una clase, algo que sucedió cuando elaborábamos una propuesta didáctica de una asignatura, algo que sucedió en un intercambio con colegas, pueden ser la semilla de uno de estos trabajos. En nuestros ejemplos, encontramos estas variantes.

### ***Las motivaciones de “Matemática en el ingreso”***

Elegir la temática de una tesis doctoral y delinear un problema para investigar no es una tarea simple, ya que invierte varios años, tiene especiales requerimientos de calidad (entre ellos la originalidad, en algún sentido) y necesita de un compromiso particular, pues se trata de una actividad que, finalmente, es individual.

Hay distintas formas de llegar al tema, y luego al planteo del problema, de una tesis doctoral. Una, es que si uno integra un equipo de investigación que estudia ciertos asuntos, se busque y determine ahí algo específico para desarrollar. Esta elección tiene aristas virtuosas: hay un grupo de colegas en el que apoyarse, compartir avances, discutir caminos, etc. También resulta natural que la dirección quede a cargo de alguien de los más experimentados de ese equipo. En cambio, al estar condicionadas las problemáticas por la investigación marco, podría suceder que el doctorando no encuentre ahí algo suficientemente atractivo como para desarrollar en un trabajo tan profundo y dedicado. Esto que mencionamos fue nuestro caso. Pese a integrar un equipo de investigación en el que trabajábamos asuntos de validación matemática en situación de aprendizaje desde hacía ya unos años, no encontramos ahí la posibilidad de generar un problema que nos atrajera lo suficiente como para llevar adelante un trabajo de la envergadura de una tesis doctoral. Estamos, entonces, ante otra forma de llegar al tema: tomar un asunto que se origine en nuestro propio interés. De por sí, que la elección del tema sea producto del interés personal es una fortaleza. Sin embargo, es conveniente tener presente algunas desventajas significativas. Por ejemplo, la falta de un equipo en el que apoyarse, lo que profundiza el carácter individual de una tesis doctoral. La generación de nuevos conocimientos es, casi siempre, una construcción colectiva. Una elección así, la reduce a un colectivo de dos personas: quien realiza la tesis y quien la dirige.

Pensar el tema de esta tesis doctoral llevó tiempo y el pasaje por varios intentos que no prosperaron, hasta que determinamos que sería algo referido a la problemática del ingreso a la universidad. Este asunto estaba vinculado a gran parte de nuestra trayectoria en la docencia y a toda la experiencia en investigación. Para la determinación del problema tuvimos en cuenta algunas preferencias personales: una investigación que fuera más cercana a lo macro que a lo microdidáctico y que trate acerca de enseñanza y no respecto de aprendizaje de la matemática. Así logramos elegir el tema: Matemática en el ingreso a la universidad. Para llegar a la formulación del problema de la investigación, fue necesario dar varios pasos más.

Como cierre de este apartado podemos comentar una experiencia personal distinta a la comentada. Cuando realizamos el trabajo de tesis de una carrera previa, una licenciatura en Enseñanza de las Ciencias con orientación en Didáctica de la Matemática, generamos un problema con marco en un proyecto con validación matemática, lo que favoreció el intercambio con integrantes del equipo (ver Carnelli, 2004).

### ***Las motivaciones de “Actividad matemática con integrales”***

El origen de este trabajo estuvo en el interés que tuvimos dos investigadores de la UNGS en realizar un estudio conjunto. Esta tarea no ocupó el lugar principal en nuestra actividad de investigación, pues cada uno ya participaba en otra, como parte de los equipos de investigadores en educación matemática del instituto en el que trabajábamos. Por esto, se trató de un proyecto más acotado, con menos pretensiones y de menor extensión temporal. Nos propusimos, intencionalmente, ubicarnos en alguna línea teórica en educación matemática, contrario a lo que usualmente hacíamos en el equipo (más adelante desarrollaremos esto en detalle).

Las problemáticas que abordaba el equipo de investigación que ambos integrábamos estaban centradas en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en estudiantes que se inician en los estudios universitarios. Continuando en esta línea, con un interés común en el Análisis Matemático y en trabajar con la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), generamos un problema consistente en describir la actividad matemática que se pretende desarrollar en estudiantes que aprenden integrales. Optamos por analizar esto por medio de manuales de uso corriente del Cálculo Diferencial e Integral.

### ***Las motivaciones de “Razonamiento y Matemática”***

El primer grupo de investigación en educación matemática que tuvo el IDH de la UNGS trabajó desde mediados de los años noventa acerca del tema de la validación en matemática en situación de aprendizaje durante varios años. A medida que la cantidad de investigadores fue incrementándose como parte del crecimiento de la universidad, el grupo se subdividió. Uno de esos grupos abrió el tema del razonamiento matemático, particularmente al estudio de las formas básicas del razonamiento inferencial, siempre focalizado en el aprendizaje en los inicios de los estudios universitarios. De un modo muy simplificado, podemos decir que, a partir de los resultados de las investigaciones en validación, encontramos que los conocimientos de los estudiantes ingresantes no eran sólidos ni estables en estos aspectos. Esto nos llevó a pensar en estudiar las formas de razonamiento inferencial a las que apelan al hacer matemática. Así, este proyecto se expresa como una continuidad de las producciones anteriores en validación.

## **Los antecedentes de la investigación**

Los antecedentes –o también llamado estado del arte o revisión bibliográfica– son las producciones de la investigación respecto del tema que nos interesa o aquellas que son cercanas a él (Rodríguez, 2017). También encontramos variedad en este aspecto en los tres ejemplos que analizamos aquí.

### ***Los antecedentes de “Matemática en el ingreso”***

Al revisar las producciones previas de la investigación acerca de la matemática en las instancias de ingreso, encontramos varios trabajos centrados en diagnósticos de conocimientos matemáticos de los ingresantes a las universidades. De la enseñanza en este nivel, no encontramos más que algunas propuestas didácticas que podrían aplicarse en cursos de matemática. Encontramos producciones que focalizaran en el acceso a los estudios superiores cuando ampliamos la búsqueda al campo de la educación, referidas a la problemática del primer año que tiene importante desarrollo en el ámbito internacional. Claro que, en estos casos, no se contemplaba la especificidad disciplinar.

El estado del arte permitió confirmar lo que era una sospecha inicial: la enseñanza de la matemática en las instancias de ingreso a las universidades estatales en Argentina era un campo aún no explorado en forma integral. Este hallazgo le daba a la investigación una de sus principales fortalezas y aportaba significativamente con el requisito de originalidad exigido a las tesis doctorales.

Ante este escenario no es que la revisión bibliográfica quedó vacía. Como dijimos, se incluyen producciones que tienen cercanía con el tema. Así, tomamos varios trabajos que trataban la enseñanza de lo numérico, lo algebraico, las funciones y la actividad matemática, que fueron los asuntos en los que giró el estudio. Vale acá detenerse en algo: la imposibilidad de que una investigación avance en forma lineal. A medida que se avanzaba en la construcción del problema de la investigación se volvía al estado del arte. Es importante tener en cuenta que el escrito que se presenta como producto de una tesis sigue formatos estandarizados que no se corresponden con los vivenciados en el devenir de la actividad.

### ***Los antecedentes de “Actividad matemática con integrales”***

Como hemos mencionado, esta investigación fue concebida para realizarse en alguna de las líneas teóricas consolidadas de la educación matemática. Pensar en estudiar la actividad matemática remite a la Teoría Antropológica de lo Didáctico. No es el único lugar donde se encuentran desarrollos de ese tema, pero sí es la teoría que más avances tiene. Por tanto, la revisión bibliográfica se centró en trabajos que estudiaran la

actividad matemática en propuestas didácticas bajo el marco de la TAD. A esto se sumó un estudio más profundo de los lineamientos de esta corriente teórica.

### ***Los antecedentes de “Razonamiento y Matemática”***

Esta investigación expresa cabalmente una línea de trabajo seguida por un equipo de investigación a lo largo de alrededor de quince años. Los primeros trabajos fueron acerca de validación en matemática en situación de aprendizaje. Se estudiaron los aprendizajes de ingresantes según distintas modalidades de enseñanza y se realizaron avances teóricos de cómo analizar el aprendizaje en validación. En Carnelli, Falsetti, Formica y Rodríguez (2008) se pueden conocer algunos de los avances en este asunto. A partir de esos avances, las dificultades encontradas y los nuevos interrogantes surgidos, se propuso seguir el camino iniciado con el estudio de las formas básicas de razonamiento que utilizan los ingresantes al realizar inferencias en el trabajo matemático. Al girar hacia el estudio del razonamiento matemático, la revisión bibliográfica incluyó la búsqueda de trabajos que abordaran lo relativo a la enseñanza y el aprendizaje de la lógica y su vínculo con la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

### **El marco teórico de la investigación**

Las herramientas conceptuales que tomamos para realizar una investigación constituyen el marco teórico. Suele utilizarse la metáfora siguiente: son *las lentes con las que se mira*. Como dice Rodríguez (2017), el marco teórico puede tomarse directamente de alguna teoría o puede ser construido especialmente para la investigación tomando aportes de distintas teorías. En este último caso, es necesario ser más explícito en los posicionamientos asumidos.

Nuevamente, tenemos en nuestras investigaciones ejemplos de marcos teóricos contruidos de modo distinto.

### ***El marco teórico de “Matemática en el ingreso”***

En este trabajo se construyó un marco teórico para la ocasión. El estudio comprendió el análisis de lo que se enseñaba en lo numérico, lo algebraico, lo relativo a las funciones y a las funciones elementales más básicas (lineales, cuadráticas) y lo que llamamos la actividad matemática transversal. Así, construimos un marco que comprendía la enseñanza de lo numérico, lo algebraico y las funciones tomando diversidad de aportes teóricos. En cuanto a la actividad matemática transversal, realizamos lo que fue el aporte teórico más sustantivo, con la construcción de lo que llamamos las manifestaciones de la actividad matemática transversal (entre ellas, la búsqueda de patrones, la formulación de conjeturas, la modelización, la validación, el uso de las técnicas, etc.).

Cada una de estas manifestaciones nos llevó a tomar aportes teóricos distintos. A modo de ejemplos, para el uso de las técnicas tomamos elementos de la TAD, para la validación tomamos aportes de las investigaciones del equipo de investigación que integramos y que hemos comentado en el apartado de antecedentes de la investigación del razonamiento matemático. Es importante señalar que todas las componentes de una investigación están imbricadas. No es posible aislarlas en el marco de un mismo trabajo. La formulación del problema de investigación, el marco teórico y los instrumentos metodológicos están en constante revisión y ajuste a medida que se avanza con la investigación.

### ***El marco teórico de “Actividad matemática con integrales”***

Esta investigación es un ejemplo de la toma de un marco teórico ligado a una teoría consolidada: en este caso, la Teoría Antropológica de lo Didáctico. De hecho, como dijimos más arriba, esa fue una de las intenciones. La TAD propone un modelo para describir la actividad matemática en términos de organizaciones matemáticas cuya base empírica se encuentra en los diseños curriculares y en los libros de textos o manuales, los que influyen notablemente en la organización de la matemática escolar (Bosh y Gascón, 2005). Estas organizaciones son conjuntos estructurados de objetos matemáticos que surgen para responder a ciertas cuestiones planteadas en una institución y tienen una componente asociada al saber hacer, formada por tipos de problemas y un conjunto de técnicas que permiten resolver esos problemas y otra ligada al saber, con las tecnologías o discursos que describen y explican las técnicas y las teorías que fundamentan los discursos tecnológicos. Los tipos de problemas no son los que tienen enunciado común, sino que son aquellos que tienen una técnica no algorítmica capaz de abordarlos y generar nuevos problemas del mismo tipo. La tecnología justifica la técnica, pero además aporta elementos para mejorar la técnica, ampliando su alcance y generando nuevas técnicas. La teoría es un discurso matemático suficientemente amplio que justifica la tecnología de esa técnica y de otras y está a una mayor distancia de la práctica. En este modelo, hacer Matemática es crear, activar o recrear una organización matemática, lo que significa resolver ciertos tipos de problemas con ciertas técnicas, de manera razonada y justificada. Los discursos tecnológicos y teóricos deben incorporar respuestas a la razón de ser de la actividad matemática y de la organización que produce. Por su parte, enseñar y aprender Matemática es la tarea de reconstruir organizaciones matemáticas para utilizarlas en nuevas situaciones y bajo otras condiciones (Carnelli, Colombano y Chacón, 2018).

Al estar interesados por estudiar la actividad matemática que se promueve en los manuales de Cálculo Diferencial e Integral, tomamos algunos elementos de la TAD: el bloque teórico y el bloque práctico que permiten describir la actividad matemática. Más



precisamente, con estos elementos pudimos analizar el discurso tecnológico, las tareas y las técnicas que encontramos en los materiales analizados.

### ***El marco teórico de “Razonamiento y Matemática”***

Hemos comentado más arriba que las temáticas investigadas por uno de los equipos de educación matemática del IDH de la UNGS giraron de la validación matemática en situación de aprendizaje a las formas básicas del razonamiento inferencial, siempre con estudiantes que están en el inicio de los estudios superiores.

Desde sus comienzos, estos equipos sostuvieron una postura teórica ecléctica, que refiere a cuando uno no se inscribe en alguna línea consolidada, sino que construye un marco para la ocasión, tomando elementos provenientes de distintas teorías.

Interesados por las formas de inferencia que utilizan los ingresantes a la universidad al hacer matemática, se abordó la enseñanza de ciertos contenidos lógicos necesarios para razonar deductivamente en matemática en los cursos en los que se realizaron los trabajos de campo. Observamos que muchos textos de enseñanza superior trabajaban los temas del campo de la lógica por medio del cálculo proposicional y de primer orden mediante tablas de verdad. Contrariamente a esto, pretendimos instalar una perspectiva semántica en la que el aprendizaje de las leyes inferenciales básicas del pensamiento deductivo surgiera en contextos con significados matemáticos y mediados por una práctica discursiva en la clase y con pares. Para esto, tomamos elementos de una teoría proveniente de la psicología cognitiva: la teoría de Modelos Mentales, de la que Johnson-Laird (1999) es uno de sus principales referentes y que “sostiene la hipótesis de que los sujetos construyen modelos de estados de cosas descritos en las premisas de los enunciados, y que mediante procesos psicológicos los habilitan para presentar una conclusión” (Quiroga Aguilar, 2010) y que consideramos ajustada a nuestras ideas en el aprendizaje del razonamiento deductivo. Esta teoría “modela los procedimientos psicológicos deductivos, no desde los formatos lógicos de los razonamientos sino desde la perspectiva de aprendizaje humano” (Carnelli, Falsetti y Sarni, 2017). Para completar una breve presentación de esta teoría, podemos decir que el razonamiento deductivo es entendido como un proceso con cuatro etapas (Johnson-Laird, Byrne y Shaeken, 1992): interpretación y representación inicial de las premisas, combinación de las interpretaciones en un modelo simple, formulación de una conclusión informativa, búsqueda de un modelo alternativo. La teoría “supone que la vinculación entre el contenido del antecedente y el consecuente puede modular el significado del condicional aportando información a los modelos, evitando la construcción de otros modelos no válidos y ayudando al proceso de construcción del modelo explícito que para el condicional  $p \rightarrow q$  es:  $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$ ” (Carnelli, Falsetti y Sarni, 2018).



## **Los resultados y los aportes de una investigación**

Todo trabajo de investigación se plantea objetivos. Desde un cierto marco teórico, se elabora un diseño metodológico para abordar el problema planteado. Al final se obtienen resultados, en términos de los objetivos y a la luz del marco teórico. Esos resultados están ligados al tipo de diseño metodológico elegido (cuantitativo, cualitativo, combinación de ambos).

Cuando se explica la relevancia del estudio (en los proyectos suele requerirse un apartado explicativo en este sentido) se explicitan los aportes que se pretenden brindar al campo científico. De todas maneras, realizar este ejercicio al momento del cierre de la investigación tiene la ventaja de contener las evidencias que fundamentan la relevancia pretendida.

### ***Los resultados y aportes de “Matemática en el ingreso”***

Un resultado relevante de la tesis doctoral fue lo que constituyó la primera etapa en la que se hizo un relevamiento de los cursos de ingreso en las universidades nacionales argentinas que tuvieran matemática entre sus asignaturas. En ese estudio (Carnelli, 2011) se observó una gran variedad en cuanto a formatos de curso, carreras a las que están dirigidos esos cursos y obligatoriedad de cursado y aprobación. A la vez, se encontró que los contenidos matemáticos tratados presentaban cierta uniformidad, a pesar de que se trataba de instituciones diseminadas por toda la extensión del país y con autonomía para determinar los contenidos. Estos temas eran del campo de lo numérico, el álgebra básica y las funciones elementales.

El estudio central de la tesis permitió delinear una caracterización de la matemática en el ingreso a la universidad. A grandes rasgos, el enfoque de la enseñanza estaba centrado en los aspectos operacionales y las técnicas algorítmicas, con poco trabajo en las nociones teóricas. Además, la presencia de la actividad matemática transversal resultó baja.

El estudio cerró con la formulación de una pregunta que abría una puerta hacia nuevas investigaciones y que refería a analizar por qué se tratan esos asuntos en los cursos de ingreso y por qué se lo hace con ese enfoque que resulta asociado a una matemática más bien árida.

Una observación que podemos realizar a la luz de estos resultados es que muchos actores del ámbito universitario, a grandes rasgos, podían anticiparlos. De hecho, nos incluimos entre quienes creíamos que lo que se estudiaba en los cursos de ingreso eran cuestiones de tipo procedimental, con foco en la operatoria numérica y algebraica. Lo que esta investigación aportó es evidencia empírica para fundamentar estas características.

Como otros resultados podemos mencionar la elaboración de un instrumento para analizar el tratamiento de lo numérico, de lo algebraico, de las funciones y de la actividad matemática transversal en actividades para el aprendizaje.

En cuanto a los aportes, no es fácil separarlos de los resultados. De alguna manera ya están dichos: el conocimiento de los tipos de cursos de matemática en el ingreso, la caracterización de la matemática que se enseña en el ingreso. Además, las grillas con las que se estudió el tratamiento de lo numérico, lo algebraico, lo funcional y la actividad matemática transversal pueden ser aplicadas para el análisis en otros contextos o tomarse como base para adaptarlas, si fuera necesario. Un último resultado, retomando algo mencionado más arriba, la caracterización de la actividad matemática transversal, una construcción teórica específica para esta ocasión, pero que no se circunscribe a ella.

### ***Los resultados y aportes de “Actividad matemática con integrales”***

Para estudiar la actividad matemática que se propone en los manuales usuales de Cálculo Diferencial e Integral elaboramos unos cuadros con los que describimos el discurso tecnológico, las tareas y las técnicas, esto es, las componentes de los bloques teórico y práctico de las organizaciones matemáticas.

A modo de ejemplo de lo obtenido, mostramos alguna parte de los cuadros que conforman el análisis de dos manuales distintos.

<b>Discurso tecnológico explicitado</b>	
<p><b>Introducción</b> Presentación de dos procesos: el ya conocido de derivación (definición de la recta tangente) y el de integración (área de recintos delimitados por gráficos de funciones continuas). Los dos procesos son independientes, pero se vinculan debido a que el cálculo de áreas requiere del cálculo de antiderivadas.</p>	
<p><b>Noción de primitiva</b> Definición de primitiva de una función Enunciación de que no es simple hallar primitivas y que no todas las funciones tienen primitiva Presentación de simbología <math>\int f</math>, <math>\int f(x)</math> o <math>\int f(x)dx</math> Enunciación y demostración de que si <math>F</math> es una primitiva de <math>f</math> entonces <math>F+k</math> también lo es (1) Las primitivas de las funciones elementales no aparecen listadas, sino que se presentan en ejemplos (2) Exhibición de una tabla con las primitivas de 73 funciones</p>	<p><i>Comentario: no justifica la dificultad de la búsqueda de primitivas y tampoco menciona la posibilidad de no existencia</i></p>
<p><b>Técnicas de integración: a) integración directa</b> Enunciación y demostración de las dos propiedades de linealidad (3). Exhibición de ejemplos. Enunciación y demostración del resultado de <math>\int x^n dx</math> para todo <math>n</math> real (4).</p>	

Tareas		Técnicas	
T <sub>1</sub>	Calcular la integral indefinida de una función, resoluble por integración directa	t <sub>1</sub>	(t <sub>1A</sub> ) hallar una primitiva usando (2) y/o (4) (t <sub>1B</sub> ) usar (1) para dar la respuesta
		V <sub>1</sub> t <sub>1</sub>	(V <sub>1</sub> t <sub>1A</sub> ) hallar una primitiva usando (3) (t <sub>1B</sub> )
		V <sub>2</sub> t <sub>1</sub>	(V <sub>2</sub> t <sub>1A</sub> ) modificar el integrando, usando equivalencias algebraicas convenientes (t <sub>1</sub> ) ó (V <sub>1</sub> t <sub>1A</sub> )

A las técnicas con las que realizan las tareas las hemos notado en el cuadro de arriba como  $t_i$ , mientras que cuando una técnica está estrechamente ligada a otra, la llamamos *variación de la técnica* y la notamos  $v_i t_i$ .

A partir del completamiento de estos cuadros para cada uno de los manuales seleccionados, elaboramos una síntesis para cada uno. Un ejemplo para uno de los textos es la siguiente:

(...) vimos que las tareas se presentan mediante situaciones intramatemáticas, con una cobertura amplia dentro de las que son usuales en el tema. Se propicia una única técnica para resolver las tareas, aunque en una situación del método de sustitución, se presentan dos técnicas distintas para resolver una misma tarea. Observamos un privilegio de la práctica reiterada de las técnicas de resolución trabajadas. El discurso tecnológico propuesto para los distintos asuntos sigue el esquema definición-propiedad-algoritmo (Carnelli, Colombano y Chacón, 2018).

En términos de aportes, podemos mencionar los cuadros que permiten describir el discurso tecnológico, las tareas y las técnicas (hay producciones que utilizan una idea parecida). También podemos decir que el estudio aporta un conocimiento más profundo de algunos manuales, al momento de tomarlos para la enseñanza.

### **Los resultados y aportes de “Razonamiento y Matemática”**

Es oportuno señalar que este proyecto está en su etapa final, por lo que las conclusiones aún están en proceso de elaboración.

El dispositivo diseñado para estudiar el razonamiento inferencial en cursos de Matemática en el ingreso a la UNGS tuvo tres momentos: 1) el tratamiento en las clases de las formas básicas de las inferencias (entre ellas, el *modus ponens*, el *modus tollens* y las dos falacias asociadas a ellos), siempre integradas y contextualizadas en los contenidos matemáticos del curso; 2) la aplicación de un test para relevar el manejo de las formas inferenciales; 3) entrevistas a pares de estudiantes para profundizar acerca de lo evaluado en el test. Este esquema se replicó con cuatro contenidos matemáticos distintos (números racionales, geometría, álgebra y funciones).

Del análisis de los tests aplicados, se pueden realizar algunas observaciones. En relación con la refutación, se observó que el razonamiento por reducción al absurdo, el reconocimiento de contradicciones y el uso de contraejemplos fueron poco frecuentes en los estudiantes, aunque en la clase se insistió con este tipo de argumentaciones. Observamos además que el lenguaje simbólico, que los docentes de matemática usan naturalmente en las clases, resultó más bien obstaculizador, tanto en el desarrollo de las formas lógicas como en las deducciones analíticas por la confusión entre el signo y su significado.

Los estudiantes que participaron en todas las etapas del dispositivo realizaron una valoración positiva de su aplicación. Destacaron la lectura comprensiva como punto de partida para la construcción de significados, el intercambio entre pares y el espacio para el debate para enriquecer sus conocimientos al tener que convencer al otro de sus ideas, y el tipo de actividades focalizadas en el razonamiento.

El dispositivo, focalizado en el aprendizaje del razonamiento deductivo elemental a nivel de ingreso a los estudios universitarios, permitió a los estudiantes reflexionar acerca de los significados del concepto, sus representaciones y propiedades, la interpretación de premisas y la conexión entre ellas. El intercambio con el entrevistador y con su par favoreció la posibilidad de formular modelos alternativos que surgieron como parte de la validación de sus respuestas. Estos factores contribuyeron a que los estudiantes pudieran construir el modelo explícito del condicional. Como uno de los aportes, se puede señalar cómo la clase de Matemática puede resultar un espacio propicio para educar el pensamiento si se generan espacios donde tenga lugar la enseñanza del razonamiento desde una perspectiva semántica.

### **Algunas reflexiones finales**

Una de las intenciones de este escrito es aportar elementos para pensar la actividad de investigación a quienes se inician en esa tarea. Por eso elegimos recorrer algunas de sus componentes, que nos parecieron interesantes para comentar y destacar cuestiones significativas. Lo hicimos con tres investigaciones en las que participamos, es decir, que vivenciamos todo el proceso que va desde que se gesta la idea hasta que se cierra con las conclusiones. Como vimos, en un lapso no muy largo, participamos en trabajos muy distintos. Si bien esto nos sirvió para ejemplificar la diversidad de la que hemos hablado, el hecho de realizar la actividad de investigar de este modo no es siempre así. En muchas ocasiones, quienes investigan en educación matemática recorren un camino más homogéneo: trabajan dentro de un marco teórico y estudian una problemática, que se amplía a medida que se avanza y que así permite generar nuevas preguntas y nuevos problemas de investigación. De todos modos, los marcos teóricos son variados, tanto los consolidados como los que se crean *ad-hoc*. Hay gran cantidad de investigadores que trabajan siempre dentro del marco de la TAD, otros que lo hacen en el marco de la socioepistemología, entre muchos otros. Elecciones de este tipo favorecen la posibilidad de especializarse en

el conocimiento de un marco teórico, realizar avances en asuntos de ese campo de modo sostenido y cada vez más profundo y, también, la consolidación de equipos de investigación. Como contrapartida, las problemáticas de estudio están condicionadas: dentro de un marco teórico dado no es posible estudiar cualquier problemática surgida. Para estos casos, seguramente se ajusta más la elaboración de un marco teórico *ad hoc*.

## Referencias

- Bosh, M. y Gascón, J. (2004). La praxeología local como unidad de análisis de los procesos didácticos. En De Castro, C. y Gómez, M. (Eds.), *Análisis del currículo actual de matemáticas y posibles alternativas* (135-157). Edebé.
- Carnelli, G. (2021). *Matemática en el ingreso a la universidad*. Editorial: Universidad Nacional de General Sarmiento.
- Carnelli, G. (2014). Matemática en el ingreso a las universidades estatales argentinas: análisis de propuestas de actividades para el aprendizaje (Tesis doctoral, Universidad de Palermo).
- Carnelli, G. (2004). Una ingeniería didáctica para la función cuadrática (Tesis, Universidad Nacional de General San Martín).
- Carnelli, G., Colombano, V. y Chacón, M. (2018). Integrales indefinidas en funciones de variable real: un estudio de la actividad matemática propuesta en los libros de Cálculo. XIII Congreso Argentino de Educación Matemática. CAREM. La Plata.
- Carnelli, G., Falsetti, M. y Sarni, M. (2018). Dispositivo para el seguimiento del aprendizaje de la inferencia directa en Matemática. XIII Congreso Argentino de Educación Matemática. CAREM. La Plata.
- Carnelli, G., Falsetti, M. y Sarni, M. (2017). Razonamiento condicional en el contexto del aprendizaje de números racionales a nivel preuniversitario: aportes de la teoría de modelos mentales. Reunión de Educación Matemática. UMA.
- Johnson-Laird, P. (1999). Deductive reasoning. *Annual Review of Psychology*. 50, 109-135.
- Johnson-Laird, P. N., Byrne, R. M., y Schaeken, W. (1992). Propositional reasoning by model. *Psychological review*, 99(3), 418-439. <https://doi.org/10.1037/0033-295x.99.3.418>
- Quiroga, L. (2010). Modelos mentales y razonamiento (Tesis, Universidad de Chile). [https://repositorio.uchile.cl/bitstream/handle/2250/109927/fi-quiroya\\_l.pdf?sequence=3&isAllowed=y](https://repositorio.uchile.cl/bitstream/handle/2250/109927/fi-quiroya_l.pdf?sequence=3&isAllowed=y)
- Carnelli, G., Falsetti, M., Formica, A. y Rodríguez, M. (2008). Un estudio del aprendizaje de validación matemática a nivel preuniversitario con distintas interacciones en el aula. *Suma. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, 58, 25-40. <https://revistasuma.fespm.es/revistas-revistas/revista-58.html>



Copyright © 2022. Gustavo Carnelli. Esta obra está protegida por una licencia [Creative Commons 4.0. International \(CC BY 4.0\)](#).

Usted es libre para Compartir —copiar y redistribuir el material en cualquier medio o formato— y Adaptar el documento —remezclar, transformar y crear a partir del material— para cualquier propósito, incluso para fines comerciales, siempre que cumpla la condición de:

Atribución: Usted debe dar crédito a la obra original de manera adecuada, proporcionar un enlace a la licencia, e indicar si se han realizado cambios. Puede hacerlo en cualquier forma razonable, pero no de forma tal que sugiera que tiene el apoyo del licenciante o lo recibe por el uso que hace de la obra.

[Resumen de licencia - Texto completo de la licencia](#)