www.ducere.cl - ISSN: 2735-668X
https://doi.org/10.61303/2735668X.v1i1.18

Propuesta metodológica para identificar tipos de conocimientos utilizados por docentes de Matemática

Methodological proposal to identify types of knowledge used by Mathematics teachers

Mabel Rodríguez
Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina
mrodri@campus.ungs.edu.ar
orcid.org/0000-0002-8425-8572

Daniel Jader
Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina
djader@campus.ungs.edu.ar
orcid.org/0000-0001-7387-6116

Guillermo Federico Umbricht
Universidad Nacional de San Martín, Argentina
gumbricht@unsam.edu.ar
orcid.org/0000-0002-8724-0909

Resumen: En este artículo se presenta una propuesta metodológica que permite describir el conocimiento especializado del profesor de matemática que puso en juego para planificar la enseñanza bajo requerimientos didáctico-matemáticos dados.
Se enmarca teóricamente el trabajo realizado, se presenta la propuesta metodológica y se incluye parte del análisis de un caso particular, a modo de ejemplo. Se encuentran, para ese caso, decisiones que toma un docente, y acciones que realiza, para responder al requerimiento de favorecer el desarrollo, en los estudiantes, de herramientas de trabajo intelectual. La identificación de las decisiones y acciones permite reconocer tipos de conocimientos y articularlos con cuestiones vinculadas a las creencias, que en este trabajo se consideraron parte de la epistemología personal del profesor.
Se plantean, como cierre, algunas líneas de trabajo futuras que permitirán profundizar el estudio.

Palabras clave: Identificación de tipos de conocimiento del profesor de matemática, epistemología personal, requerimientos didáctico-matemáticos, planificación de la enseñanza de matemática.

Abstract: This article presents a methodological proposal that allows to describe the mathematics teachers' specialized knowledge used to plan the teaching under given didactic-mathematical requirements.
The work carried out is theoretically framed, the methodological proposal is presented and part of the analysis of a particular case is included, as an example. We found decisions made by a teacher and actions carried out to respond to the requirement to favor the students' development of intellectual work tools. The identification of decisions and actions allows to recognize types of knowledge and articulate them with issues related to beliefs, which in this work were considered part of the personal epistemology of the teacher.
Finaly, some future lines of work are proposed that will allow the study to be deepened.

Keywords: Identification of types of knowledge of the mathematics teacher, personal epistemology–didactic-mathematical requirements, planning mathematics teaching.

Recibido: 21 de Diciembre de 2021
Aceptado: 14 de Abril de 2022

Introducción

En Argentina, distintas instituciones vinculadas con la educación establecen indicaciones para docentes, en carácter prescriptivo o a modo recomendaciones, respecto de cómo debiera encararse la enseñanza de la matemática. El ejemplo más común es el de los diseños curriculares de la formación básica obligatoria. Los mismos prescriben posicionamientos, formas de trabajo en el aula, características de actividades, tipos de intervenciones docentes, etc., que los profesores deben asumir. Los diseños, que en Argentina son generados a nivel jurisdiccional, comunican una norma a seguir. Sin embargo, no siempre se ve reflejada en las propuestas de enseñanza. Planificar la enseñanza de la matemática y sostenerla a lo largo de las clases, bajo las pautas recibidas, es una tarea que no siempre resulta sencilla para el profesor.

Esta situación, referida al vínculo entre los diseños curriculares de la escolaridad obligatoria y las propuestas de enseñanza de la matemática se replica, aunque no del mismo modo, a nivel superior. En este nivel, las instituciones educativas, tanto institutos de formación superior como universidades, pueden, o no, establecer pautas para la enseñanza de la matemática. Pero no son los únicos. Otras instituciones, preocupadas por la formación de profesionales de algún área, a su vez generan documentos que expresan consensos logrados con años de trabajo colectivo entre colegas. En Argentina, un ejemplo de esto es el Consejo Federal de Decanos de Ingeniería que pauta cómo encarar la formación de ingenieros de distintas orientaciones a nivel nacional, y esto incide y condiciona la enseñanza de la matemática. Por su parte, y solo a modo de sumar otro ejemplo, el Consejo Universitario de Ciencias Exactas y Naturales trabaja alrededor de pautas comunes para la formación de profesores de matemática de todo el país.

Es así que los docentes que tenemos a cargo los diseños de asignaturas de matemática estamos ante una situación que podemos describir a grandes rasgos del siguiente modo. La institución en la que trabajamos, u otro organismo, podría pautar requerimientos, pautas o condicionantes didáctico-matemáticos que los docentes debiéramos considerar en el momento de llevar adelante la programación de la propuesta formativa que tenemos a cargo. En este trabajo nos interesa centrarnos en los conocimientos didáctico-matemáticos que los docentes ponen en juego, o son necesarios, para poder responder con solvencia a esta situación.

A partir de estos intereses, hemos planteado un proyecto de investigación que estamos desarrollando en la Universidad Nacional de General Sarmiento contando con la participación de investigadores de otras universidades argentinas.

En este artículo presentamos un problema de tipo metodológico con el que nos encontramos en la evolución del trabajo, una propuesta para abordarlo, un ejemplo de aplicación y, finalmente, expresamos algunas cuestiones aún abiertas que seguimos estudiando.

Encuadre del trabajo y marco teórico

A partir del interés expresado en la introducción, hemos decidido estudiar los tipos de conocimientos que ponen en juego docentes que han logrado responder con solvencia a la tarea de diseñar propuestas de enseñanza de matemática que atienden a ciertos requerimientos didáctico-matemáticos.

Este planteo nos ha llevado, en primer lugar, a hacer una búsqueda de antecedentes teóricos acerca de tipos de conocimientos de profesores de matemática y a precisar a qué nos referimos con requerimientos didáctico-matemáticos. En segundo lugar, hemos necesitado identificar docentes que hubieran respondido con solvencia a este tipo de tareas de diseño. Esto nos permitió disponer de un grupo de docentes con quienes trabajar para identificar los tipos de conocimientos que movilizaron al momento de planificar la enseñanza. Es a partir de allí que quedamos frente a un problema metodológico: establecer, para este grupo de docentes, *de qué modo identificar los tipos de conocimientos puestos en juego en la tarea de diseño que resolvieron adecuadamente*. En este trabajo presentamos una propuesta para abordar este problema y compartimos parte de su puesta en práctica para uno de los docentes seleccionados.

Continuamos precisando los elementos que conforman el marco teórico de este trabajo.

Entendemos por *requerimientos didáctico-matemáticos* (o simplemente requerimientos) a pautas o normas didácticas o matemáticas que operan directamente en la enseñanza o el aprendizaje a nivel de una asignatura de Matemática que excedan a la enunciación de contenidos mínimos. Estas pautas pueden ser impuestas por la institución educativa u otro organismo o autoimpuestas por el docente. Ejemplos de este tipo de requerimientos son: el dictado de clases –total o parcial–, de manera virtual; la enseñanza enfocada en el desarrollo de competencias profesionales; el trabajo alrededor de la resolución de problemas o modelización matemática; la enseñanza centrada en el desarrollo de habilidades o hábitos de estudio, entre otros.

Para tener en cuenta los tipos de conocimientos que un profesor de matemática pone en juego a la hora de desarrollar su labor, utilizamos el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (Mathematics Teacher's Specialised Knowledge), conocido por su sigla en inglés MTSK (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013; Flores-Medrano, Montes, Carrillo, Contreras, Muñoz-Catalán y Liñán, 2016). Este modelo se relaciona con el trabajo de Shulman (1987), y posteriores avances, agregándole especificidad matemática. Agrupa los tipos de conocimientos del profesor de matemática en tres grandes grupos o dominios: un primer grupo centrado en el *conocimiento matemático* (MK), el segundo en el *conocimiento didáctico del contenido* (PCK) y el tercero, en relación con los otros dos, se centra en *las creencias sobre la matemática, sobre su enseñanza y aprendizaje*.

Los dominios MK y PCK se dividen a su vez en tres subgrupos o subdominios. El dominio MK aborda el conocimiento de la matemática y se compone de:

1. El *conocimiento de temas* (KoT), que hace referencia al conocimiento de los conceptos matemáticos en profundidad y su fundamentación.
2. El *conocimiento de la estructura de la matemática* (KSM), referido al conocimiento de las relaciones existentes entre diferentes temas matemáticos, y
3. El *conocimiento de la práctica matemática* (KPM), que incluye el conocimiento acerca de las formas de generar, validar y explorar en matemática.

Asimismo, el dominio PCK aborda el conocimiento de la enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos y se compone de:

1. El *conocimiento de la enseñanza de la matemática* (KMT), que hace referencia al conocimiento del docente de diversas y variadas estrategias, recursos y técnicas de enseñanza del contenido.
2. El *conocimiento de las características del aprendizaje de la matemática* (KFLM), que considera el conocimiento del contenido matemático focalizado en el aprendizaje. Incluye conocer dificultades asociadas al aprendizaje y las formas de interacción de los estudiantes con el contenido y, finalmente,
3. El *conocimiento de los estándares de aprendizaje de la matemática* (KMLS) respecto del conocimiento del docente con las expectativas de aprendizaje del alumno.

La Figura 1 es una representación muy utilizada que presenta los dominios y subdominios del modelo.

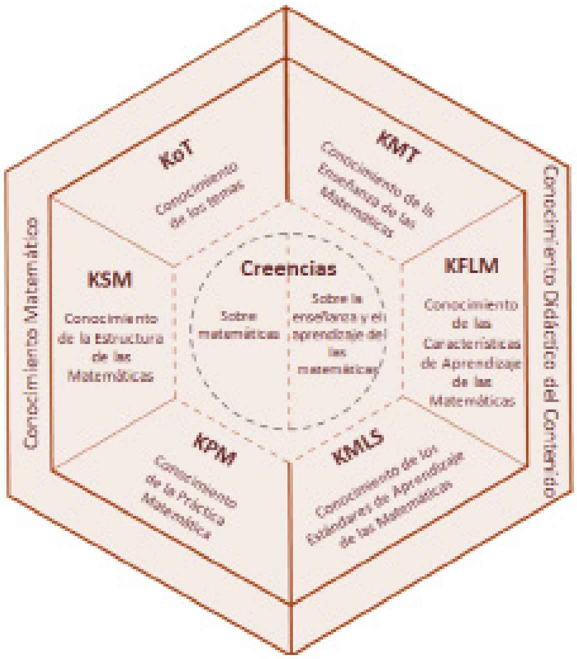
Es importante mencionar que la división propuesta en el modelo MTSK es teórica. Es decir, en un contexto real, existen intersecciones entre los subdominios.

En este modelo, ubicamos los requerimientos didáctico-matemáticos dentro del KMLS. Esta elección se debe, principalmente, a que entendemos que armar una propuesta completa de enseñanza bajo pautas establecidas se puede considerar como parte de los estándares de aprendizaje pretendidos para los estudiantes.

Para mayores detalles respecto de las creencias en la matemática y de su enseñanza y aprendizaje, consideramos la articulación que realiza Gómez-Chacón (2017) con el modelo MTSK y la epistemología personal docente. La autora describe a la *epistemología personal* como “el estudio del pensamiento sobre el conocimiento y el proceso de conocer de los individuos” (Gómez-Chacón, 2017, p. 50) y señala que es un concepto multifacético que opera en tres áreas del sujeto: lo cognitivo, lo metacognitivo y lo afectivo. Si bien el concepto surge en la psicología educativa y cognitiva, en la actualidad se estudia y se desarrolla en otras áreas. Según la autora, las dimensiones centrales, más significativas, de la epistemología personal son: naturaleza, certeza, simplicidad y fuente del conocimiento y la justificación del saber. Por este motivo, ella agrega que, operativamente, la epistemología personal incide en el razonamiento del docente, creencias y la toma de decisiones, entre otros aspectos.

Figura 1

Subdominios del MTSK



Fuente: Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, citado en Flores-Medrano *et al.*, 2016, p. 209.

Este conocimiento, en forma conjunta con los saberes académicos del profesor, opera significativamente en la toma de decisiones y sus acciones a la hora de diseñar su propuesta de enseñanza y llevarla a cabo.

Esta articulación nos permite complementar el modelo MTSK dejando en evidencia el lugar de las decisiones y acciones asumidas por el docente, en vínculo con sus creencias, las que, en muchos casos, están relacionadas con sus experiencias personales.

Además, consideramos el *modelo de planos de formación docente* (Rodríguez, Pochulu y Fierro, 2019). Este modelo resulta útil para analizar las diferentes propuestas didácticas. En él se indica cómo en distintos niveles de formación se repite estructuralmente el trabajo docente a la hora de planificar la enseñanza, a la vez que cambia sustantivamente el contenido de esa estructura.

Según los autores, la planificación de la enseñanza conlleva un posicionamiento didáctico-matemático del profesor frente al contenido, el aprendizaje y la enseñanza, el establecimiento de las metas de aprendizaje, el diseño coherente de instrumentos para la enseñanza y evaluación, la gestión de la clase y la reflexión respecto del funcionamiento y adecuación de su propuesta completa de trabajo. La tarea de planificación se inicia teniendo en consideración quiénes son los destinatarios de la enseñanza. La siguiente figura (Figura 2) expresa estos elementos, situando la enseñanza de la matemática en el nivel medio. Es importante aclarar que la planificación de la enseñanza para otros destinatarios (futuros profesores, docentes en ejercicio, etc.) mantiene una estructura similar a la presentada en este caso. El modelo resalta este hecho, señala la estructura similar pero la ubica en nuevos planos, lo que permite advertir lo similar a la vez que diferenciar la naturaleza del contenido de la enseñanza en estos otros casos. El trabajo mencionado incluye detalles, ejemplos y otras consideraciones que no son necesarias para este trabajo, razón por las que no son mencionadas aquí.

Figura 2

Plano 1 del modelo de planos de formación docente

Fuente: Rodríguez *et al.*, 2019, p. 88.

En este modelo, consideramos los requerimientos didáctico-matemáticos como parte del posicionamiento inicial que rige el resto de las decisiones que el docente tomará. Para nuestra investigación, el análisis de la coherencia de una propuesta de enseñanza respecto del requerimiento didáctico-matemático se llevó a cabo en términos de los elementos de este modelo.

A partir de la explicitación del marco teórico, podemos precisar la pregunta que orienta este trabajo: *de qué modo identificar los tipos de conocimientos especializados del profesor puestos en juego por docentes que han diseñado un curso de Matemática que atiende a requerimientos didáctico-matemáticos dados.*

La propuesta metodológica

En primer lugar, señalamos que es necesario identificar docentes que hayan diseñado cursos de Matemática que atienden a requerimientos didáctico-matemáticos. Para ello, proponemos considerar *casos*, cada uno de los cuales se conforma por:

- una institución (en la que hay expresado un requerimiento didáctico-matemático a atender en una cierta asignatura),
- la asignatura de matemática,
- el requerimiento,
- el docente (o equipo) que diseña y
- la propuesta didáctica (o propuesta de enseñanza) que da respuesta al requerimiento.

La conformación de cada caso nos lleva a disponer de un corpus de materiales y a analizar fehacientemente la adecuación de la propuesta didáctica al requerimiento. Para establecer ese análisis, utilizamos como referencia el modelo de planos de la formación docente recién presentado (Rodríguez *et al.*, 2019). A partir de allí, el estudio continúa con el docente de cada uno de los casos. Es allí donde se sitúa el problema de índole metodológico de cómo identificar los tipos de conocimientos puestos en juego por cada docente.

La propuesta para responder a este problema, que presentamos aquí y mostramos resultados de su aplicación, es la siguiente.

Primera parte: diseño de una entrevista

La entrevista tiene un diseño que debe permitir: reconocer aspectos clave de la planificación y de decisiones que el docente asume junto con las razones que lo llevaron a ellas entendiendo que eso le da lugar a atender al requerimiento recibido. A partir de allí debemos indagar acerca de los saberes que le permitieron al docente tomar cada una de las decisiones y llevar adelante cada uno de los componentes de su programación. Es decir, la entrevista nos tiene que permitir entender qué cuestiones de la planificación dejan ver el modo en el que el docente respondió al requerimiento. Para ello, consideramos los siguientes cuatro componentes: el programa de la materia, el conjunto de actividades (guías de trabajos prácticos, trabajos especiales, ejercitación, tareas, etc.), la gestión de la clase y la evaluación. Las preguntas del protocolo de la entrevista indagan si, en cada uno de ellos –si corresponde– puede verse el modo en el que el docente da respuesta al requerimiento. Asimismo, en una segunda instancia, se pregunta al docente si es capaz de identificar cuáles fueron los conocimientos específicos que lo llevaron a considerar dichos rasgos. Se busca tener datos de lo que cada docente reconoce como conocimientos puestos en juego. A manera de ejemplo, presentamos algunas de las preguntas que se realizaron en la entrevista.

> En las actividades que se proponen para los estudiantes, ¿se puede apreciar dónde y de qué manera se tiene en cuenta el requerimiento? ¿Puedes identificar qué te llevó a proponer esas actividades? ¿Identificas algún conocimiento que, en caso de no haberlo tenido, te habría impedido hacer la propuesta de actividades que hiciste?

Recién a partir de contar con las respuestas, nos proponemos interpretar cuáles de los subdominios del MTSK han sido puestos en juego y, si es posible, cuáles han tenido mayor injerencia en la planificación del docente.

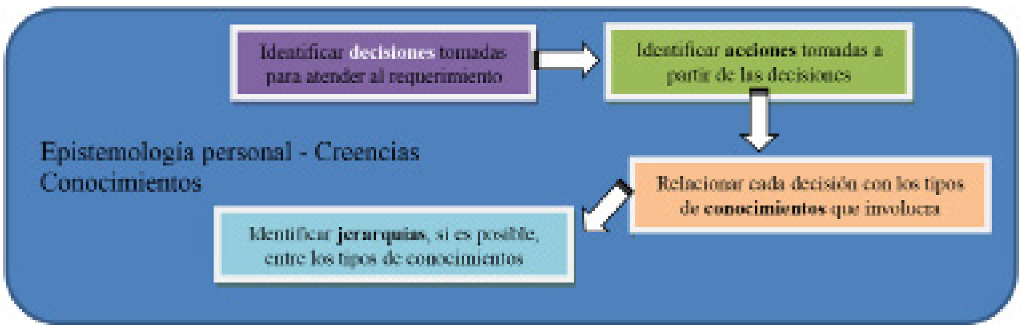
Antes de mostrar detalles de la implementación para un caso, detallamos la segunda parte de la propuesta metodológica que focaliza en el modo de analizar los datos recabados luego de disponer de ellos.

Segunda parte: análisis de la entrevista

Para esta etapa, nos apoyamos en el trabajo de Gómez-Chacón y De la Fuente (2019) en el que identifican acciones y decisiones de docentes (que enseñan modelización matemática) basadas en su epistemología personal. Lo reportado en el artículo no aplica directamente en nuestro caso, pero nos ha permitido adaptar la idea a nuestro problema de interés. Para este trabajo proponemos, interpretando las respuestas a la entrevista, identificar en primer lugar decisiones que el docente tomó y acciones que realizó consecuentemente con la finalidad de responder al requerimiento para, en segundo lugar, vincularlas con los conocimientos de los subdominios del modelo MTSK involucrados en ellas. Entendemos que creencias y conocimientos subyacen e inciden en las decisiones y acciones y, en cada caso, uno u otro tendrá una presencia más o menos marcada. Por esa razón, entendemos que el procedimiento que seguimos puede esquematizarse (ver figura 3) dejando en un plano subyacente la epistemología personal, creencias y conocimientos, cada uno de estos, en cada parte del análisis, se manifestará de un modo más o menos preponderante.

Figura 3

Interpretación esquemática del procedimiento metodológico



Fuente: Elaboración propia.

De este modo proponemos, interpretando las respuestas a la entrevista, identificar decisiones que el docente tomó y acciones que realizó consecuentemente con la finalidad de responder al requerimiento para vincularlas con los conocimientos de los subdominios del modelo MTSK involucrados en ellas. Asimismo, tendremos en cuenta reconocer qué parte del plano subyacente rige en cada aspecto indagado.

Estas decisiones y acciones las identificamos en los cuatro componentes que mencionamos anteriormente (programa, actividades, gestión de clase, evaluación), entre los que se advierte la forma en la que el docente da respuesta al requerimiento.

Suele decirse que las creencias *permean* a los conocimientos de un docente en cada uno de sus subdominios (Flores-Medrano *et al.*, 2016). Entendemos que la adaptación realizada nos permite encontrar un modo de operativizar lo que la frase afirma.

En la sección siguiente desarrollamos parte de la implementación de esta propuesta para uno de los casos.

Implementación y análisis para un caso

Como hemos mencionado, un caso se constituye por: una institución, una asignatura de matemática, un requerimiento, un docente y la propuesta didáctica a la que debemos tener acceso.

La manera explícita acerca de cómo se eligen los casos excede el alcance físico de este trabajo y puede verse en Camós y Colombano (2021).

En este artículo ejemplificamos la propuesta con un caso particular. Este se ubica en la Universidad Nacional de General Sarmiento en el Taller Inicial Orientado en Ciencias Exactas (TIO). Nos referimos al docente entrevistado como P. Tuvimos acceso íntegro a su propuesta didáctica. El requerimiento didáctico-matemático recibido expresa que la propuesta permita desarrollar en los estudiantes herramientas de trabajo intelectual (UNGS, 2019). Para afrontar este requerimiento, el docente propuso promover el desarrollo de ciertas habilidades matemáticas y hábitos de estudio. Específicamente consideró las habilidades: interpretación de textos matemáticos, uso de lenguaje matemático y acceso y uso de nuevas tecnologías para aprender matemática. Respecto de los hábitos de estudio, contempló: uso de la biblioteca, preparación de exámenes y toma de apuntes. Verificamos que efectivamente la propuesta de P es coherente con el requerimiento. Esto se pudo fundamentar, siguiendo lo expresado en el marco teórico para analizar esta coherencia. Consideramos los elementos del modelo de planos, accedimos a las actividades, programa de la materia, evaluaciones, etc., a la vez que ahondamos en detalles a partir de respuestas que dio P en un encuentro llevado a cabo para tal fin, durante la conformación de los casos.

La aplicación de la entrevista a P se realizó de manera virtual, mediante una plataforma de videoconferencia, a raíz de la pandemia y fue grabada en toda su extensión.

Describimos brevemente cuestiones generales de las respuestas que P ofreció. Respecto de las preguntas en las que se indaga si el programa de la materia expresa, de algún modo, la forma en la que el docente atendió al requerimiento, señalamos lo siguiente. El docente P, afirma que su forma de atender al requerimiento impuesto fue enfocarse en el desarrollo de habilidades matemáticas y hábitos de estudio, que favorezcan el desarrollo de herramientas de trabajo intelectual. Particularmente las habilidades que figuran en el programa son: acceso y uso de nuevas tecnologías para aprender matemática, uso de lenguaje matemático e interpretación de textos matemáticos. Respecto de los hábitos, figuran: el uso de la biblioteca, la toma de apuntes y la preparación de exámenes. Interpretamos, a raíz de lo que comenta en la entrevista de la discusión entre los equipos de coordinación de Talleres iniciales de matemática, que P asume las habilidades matemáticas como acciones conscientes, correctas, que llevan a resolver cuestionamientos matemáticos, en consonancia con lo expresado en Rodríguez (2016). Esta perspectiva enfatiza la necesidad de la toma de consciencia respecto de las acciones. La reflexión y las cuestiones de tipo metacognitivas tendrán, por tanto, un lugar preponderante en una propuesta de enseñanza que promueva su desarrollo. Aunque P reconoce al programa como un requerimiento formal, poco valioso, manifiesta que varias de estas herramientas se ven reflejadas en el programa, como el uso de instrumentos informáticos, la preparación de escritos en diferentes géneros discursivos (evaluación parcial presencial, trabajo domiciliario, informe), la toma de apuntes en clase, el estudio de bibliografía específica, el trabajo en grupos de pares, entre otras.

Respecto de cuáles conocimientos P reconoce que le resultaron clave para plasmar su respuesta al requerimiento en el programa de la materia, identifica dos grandes ejes. Por un lado, su vasta experiencia de trabajo en diferentes cursos universitarios introductorios en los que actuó como coordinador, docente, autor de materiales e investigador en educación matemática. Por otro lado, resalta el estudio que desarrolló para su tesis doctoral. Señalamos que, en ella, P conoció y estudió los materiales para estudiantes, de la materia inicial de matemática, de universidades nacionales de todo Argentina. Esto es identificado por P y coincidimos que le abrió un panorama extremadamente amplio referido a enfoques y perspectivas plasmadas en las propuestas de enseñanza de las primeras materias de matemática universitaria.

Asimismo, respecto de cómo se atiende el requerimiento en el desarrollo de las clases, P comenta que durante ellas propone actividades para interpretar textos, promueve la oralidad, la precisión gradual en los escritos e incentiva la búsqueda de información para los contenidos que son parte del programa de la materia: álgebra básica. A esto se suman actividades de reflexión posteriores, matemáticas y de identificación de dificultades y avances, como se puede ver en los siguientes ejemplos.

Las actividades siguientes se ofrecen de forma consecutiva, con la indicación de trabajar en grupos. Al cabo de un tiempo de trabajo, los estudiantes presentan las distintas resoluciones en el pizarrón. El docente, según indica su planificación, no se expide respecto de lo matemáticamente correcto. Al respecto, encontramos lo siguiente.

Puesta en común: En el pizarrón, presenten las resoluciones, con las correspondientes justificaciones. Esto lo hace cada grupo por medio de un representante. Al finalizar la exposición pueden realizar preguntas o correcciones. Yo no diré en ningún caso si las resoluciones son o no correctas.	El docente funciona de moderador; no toma partido por ninguna resolución ni dice si son correctas o incorrectas. Si ve errores que no se resuelven, plantea algún interrogante; si aún así no se resuelve, se registra la observación y se discute en la próxima clase. Es importante valorar aquellos que hayan ido más allá de lo que estrictamente se pregunta (por ejemplo, pensar en una forma general que sirva para todos los casos).

Mostramos algunas actividades para luego poner énfasis en el modo en el que cierra la clase, en concordancia con el propósito relativo a las habilidades.

1) En la figura se muestra un cierto diseño de baldosas blancas y grises que se forma con una fila de una cierta cantidad de baldosas blancas rodeada de baldosas grises. En el ejemplo, se muestra el diseño para tres baldosas blancas rodeadas por baldosas grises y para cuatro baldosas blancas rodeadas por baldosas grises. ¿Cuántas baldosas grises se necesitan para el diseño cuando se colocan 143 baldosas blancas? Expliquen por qué.

Sin hacer puesta en común, ni expedirse en lo matemáticamente correcto de las resoluciones de la actividad anterior, se plantea lo siguiente.

2) Marcos está buscando trabajo. En un *shopping* encontró ofertas laborales en dos negocios de ropa que tienen similares características en cuanto al tipo de trabajo, el horario, la cantidad de clientes y volumen de ventas. En el local A, le ofrecen un sueldo fijo de $ 18000 más una comisión del 5 % sobre el total de sus ventas. En el local B, le ofrecen un sueldo fijo de $ 19700 más 3% de comisión sobre el total de sus ventas. ¿Para qué volumen de ventas (en $) le conviene trabajar en uno u otro lugar?
3) En una reunión de amigos, un mago propone el siguiente truco a los asistentes: “Piensen un número; multiplíquenlo por 5; al resultado, súmenle 1; multipliquen a lo obtenido por 2; súmenle 8 al resultado que tienen; ahora, dividan por 10; por último, réstenle al resultado el número que eligieron”. Una vez que todos los asistentes realizaron el cálculo, el mago les dice “A todos les dio 1”. ¿Funciona el truco del mago en cualquier caso? ¿Por qué?

4) Resolver las siguientes ecuaciones.

a) $(3-x)^2=16$ b) $1-\frac{6-3x}{3}=x$ c) $0x=0$

Luego de la última puesta en común general, con la exposición y discusión por parte de los estudiantes, el docente deja como tarea buscar en libros de matemática o en la web acerca de los asuntos pendientes que se registraron. Finalmente, cierra la clase proponiendo una reflexión pertinente a lo trabajado. La siguiente imagen muestra el modo de llevar a cabo esa instancia y la intencionalidad docente.

Reflexión pertinente a lo trabajado: Vamos a evaluar su actividad dentro de cada uno de los dos grupos. Para ello, respondan: ¿Cómo te viste intentando resolver los problemas? ¿Pudiste explicar tus ideas dentro del grupo? ¿Pudiste entender las ideas de los demás? ¿Volviste a preguntar en caso de ser necesario? ¿Qué dudas se te plantearon? ¿Pudiste resolverlas?	*Asuntos a discutir:* – Destacar las distintas formas de resolución que surgieron; eventualmente, podría valorárselas con algún criterio. Por ejemplo, si aparecieron letras o no. – Ver las formas en que se argumentaron las respuestas. – Precisar la lista de asuntos pendientes para la clase próxima y que ellos busquen acerca de ello. – Destacar elementos centrales del trabajo en grupo que deben desarrollar (comprometerse con una producción colectiva, atender a la participación de los demás, etc.). – Destacar el ir más allá de lo que se pregunta estrictamente.

Frente a la pregunta concerniente al sistema de evaluación del Taller y si este atiende al requerimiento, P sostiene que hay variedad en las instancias de evaluación, que estas se integran al desarrollo de la clase y que se dan en varios momentos, con diferentes modalidades de trabajo (individual, grupal, domiciliaria, etc.). Para evidenciar el trabajo de los alumnos realizado en las evaluaciones, a manera de ejemplo, P señala que una evaluación tuvo una primera etapa, domiciliaria, individual, de búsqueda en la web y una segunda etapa grupal, presencial en la que los estudiantes debieron responder preguntas referidas a la interpretación matemática de lo hallado en las búsquedas.

P no fue consciente de cuáles fueron los saberes específicos que le permitieron diseñar el curso atendiendo a los requerimientos didáctico-matemáticos que le fueron dados. Considera que probablemente haya podido hacerlo debido a su experiencia adquirida durante muchos años de trabajo en cursos preuniversitarios.

A continuación presentamos la interpretación de algunas de las respuestas obtenidas en la entrevista, en vínculo con acciones, decisiones y tipos de conocimientos puestos en juego.

Enfatizamos que, al momento de analizar los tipos de conocimientos, resaltamos aquel o aquellos que consideramos que rige/n por sobre los demás.

El docente manifiesta, en la entrevista, conocer gran parte de los materiales de ingreso que utilizan las universidades nacionales, por su estudio de posgrado. Recalca que el trabajo con ingresantes a la Universidad es un ámbito que le resulta familiar debido a que se desempeñó por largo tiempo, aunque bajo otras perspectivas. P toma la decisión de *producir conocimiento y teoría a partir de su propia experiencia* y, esta decisión, característica de su epistemología personal, resulta central en las acciones que desembocan en la *elaboración de su propuesta*. P es consciente de esta decisión. Su experiencia previa al respecto fue como docente, como parte del equipo de coordinación y como investigador en temáticas vinculadas a la formación de estudiantes que inician los estudios superiores. Su recorrido significativo en el conocimiento sobre "ingresantes" fue puesto al servicio de atender al requerimiento. El *conocer muchas formas distintas de pensar cursos iniciales* lo asociamos con el conocimiento de la enseñanza, KMT. (1)

Por otra parte, señala el haber participado como docente, en sus inicios de la tarea hace años, en propuestas de enseñanza que le permitieron advertir que los contenidos pueden tener distintas formas de tratamiento. La ductilidad en el tratamiento del contenido, lo considera decisivo para el resto de su trabajo profesional. En términos de tipos de conocimientos, resaltamos *tener miradas distintas sobre la matemática* y lo asociamos con el conocimiento de la estructura y de la práctica matemática, KSM y KPM. (2)

Asimismo, su estudio en cuestiones de educación matemática le da elementos para conocer formas de aprender de los estudiantes que se inician en el nivel superior. En términos de tipos de conocimiento, *saber cómo aprenden* alude al conocimiento KFLM. (3)

A partir de allí, articulando estos saberes, delinea la propuesta de enseñanza. De este modo, *delinear la propuesta* pone en juego el conocimiento de la enseñanza, KMT. (4)

Esto nos permite comprender de qué modo se relacionan los conocimientos que el docente puso en juego para concebir la propuesta de enseñanza globalmente (Figura 4).

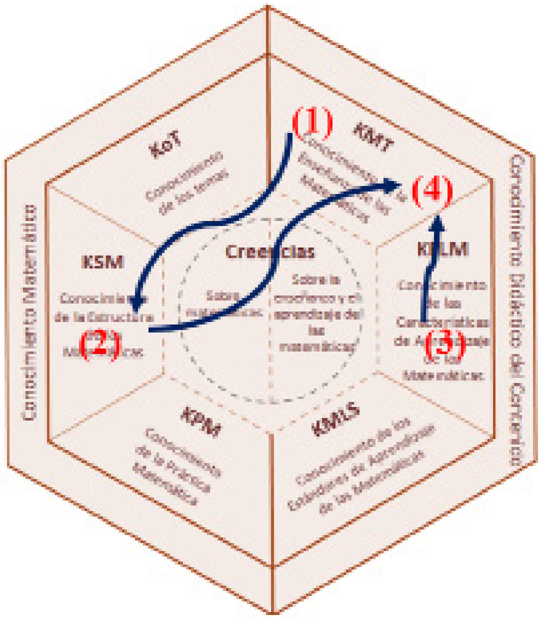
Avanzamos en la indagación respecto de cada una de las partes específicas de la propuesta.

Respecto de las actividades, elegimos para presentar lo que expresa P respecto del lugar de la interdisciplinariedad y en relación con el tratamiento de las variables. Acerca de lo primero, menciona:

> Hay una clase de tiro oblicuo y resultó más discutible con los docentes. Para mí es una deuda. ¿A qué se debe? A mí no me gusta. No me siento atraído, la matemática aplicada no me atrae. Seguramente eso se expresa en mi dificultad para lo interdisciplinario. Me cuesta más (Entrevista a P, 2021).

Figura 4

Relaciones entre los tipos de conocimientos puestos en juego al concebir, globalmente, la propuesta de enseñanza



Fuente: Elaboración propia.

En términos de la epistemología personal de P, interpretamos que toma la decisión de *incluir una baja cantidad de actividades vinculadas con propuestas interdisciplinarias*, con la subsecuente acción de *diseñar una* de ellas está regida por su epistemología personal, aunque quedan de relieve conocimientos del dominio matemático. Específicamente del KoT, pues presenta una aplicación del contenido en otra área. Las actividades de aplicación de un contenido suelen asociarse, desde la educación matemática, a modelos tradicionales de enseñanza, como el normativo (Charnay, 1994). El TIO tiene un enfoque completamente distinto a un curso tradicional, no solo por la modalidad propia de un taller, sino por el foco en el desarrollo de habilidades y hábitos. Interpretamos, y quedaría pendiente volver a contactar al docente para ratificar o rectificar este supuesto, que más allá de su desagrado, podría no haber encontrado el modo de articular ese tipo de actividad con la propuesta de enseñanza con foco en las habilidades.

Respecto de las variables, P toma la decisión de *enmarcar las actividades en el Modelo 3UV* (Ursini, Escareño, Montes y Trigueros, 2005). Producto de esta decisión, diseña actividades que ponen de manifiesto los distintos usos, pero también, atendiendo al desarrollo de habilidades propone un trabajo posterior, de reflexión pertinente a lo realizado. “Reflexionar sobre cómo usaron las letras tiene mucho anclaje matemático.

Cómo se usan las letras en matemática, es muy propio de este TIO" (entrevista a P, 2021). Notamos cómo su epistemología personal interviene en las relaciones que establece entre sus conocimientos y el requerimiento. El conocimiento destacado puesto en juego, consideramos que es el KMT. Sin embargo, las razones que esgrime, nos hacen sumar el KSM al proponer que los estudiantes comprendan diferencias entre variables, parámetros, uso de la variable como número general, como incógnita y las formas en las que estos objetos cambian de estatus a lo largo de una misma actividad.

Para ejemplificar esto, consideremos la actividad 3 presentada anteriormente, acerca de la validez universal de un truco que hace un mago. Interpretar el enunciado y lograr una expresión del tipo $\frac{(x\cdot 5+1)\cdot 2+8}{10}-x$, trae aparejado el *uso de la variable como número general* (Ursini *et al.*, 2005). A partir de esa expresión, manipulando puede llegarse a que el resultado siempre será 1, pudiendo no haber planteo explícito de ecuaciones sino exclusivamente el manejo de expresiones equivalentes. A saber:

$\frac{(x\cdot 5+1)\cdot 2+8}{10}-x$ es equivalente a $\frac{10x+2+8}{10}-x$, la que es equivalente a $\frac{10x+10-10x}{10}$ lo que resulta ser siempre 1, independientemente del valor asignado a la *x*.

Ahora bien, el planteo de una ecuación $\frac{(x\cdot 5+1)\cdot 2+8}{10}-x=1$ desde el inicio, para indagar si el conjunto solución es $\mathbb{R}$, involucra el uso como número general, en primer lugar escribir la ecuación, pero luego el *uso de la variable como incógnita específica* (Ursini *et al.*, 2005). En este caso, resolver la ecuación $\frac{10x+10-10x}{10}=1$ obliga a interpretar el significado de 1 = 1 en términos de la ecuación inicial, o 0 = 0. La reflexión posterior de esta interpretación y los distintos usos que *una letra* puede tener en matemática es lo que el Taller promueve, en concordancia con el desarrollo de las habilidades del uso de lenguaje y de la interpretación de un texto matemático que, en este caso, sería de producción propia.

Respecto de la evaluación, P menciona la decisión de *proponer un sistema de evaluación no tradicional*. Posteriormente, y en correspondencia, la acción plasma un *diseño de la evaluación del Taller que involucra diferentes instrumentos, instancias grupales, individuales, domiciliarias y presenciales*. Ubicamos a esta decisión y acción dentro del conocimiento de los estándares KMLS porque conoce lo que debe evaluarse, según lo requerido, y también por sus conocimientos de educación matemática referidos a tipos de instrumentos y sistemas de evaluación.

A modo de cierre

Estudiar los tipos de conocimientos que ponen en juego docentes que diseñan propuestas de enseñanza de la matemática que contemplan requerimientos didáctico-matemáticos no nos resultó tarea sencilla. La propuesta metodológica nos permitió avanzar al asociar a las decisiones y acciones, un tipo (o varios) de conocimiento predominante. Sin embargo, mencionamos dos direcciones en las que sería interesante ahondar. Por un lado, resultaría valioso tener algún tipo de refinamiento de los conocimientos puestos en juego, para poder dar información más allá del subdominio al que responden, sin la especificidad fina que queda sujeta al dato puntual. Así como Escudero-Ávila y Carrillo Yáñez (2020) muestran un desglose de categorías que conforman los subdominios del conocimiento didáctico del contenido, probablemente tengamos que asumir la tarea de proponer algo similar para el conocimiento matemático. Recién, luego de llevar adelante este refinamiento, podríamos dar más información en términos de los tipos de conocimientos puestos en juego por el profesor.

Por otra parte, entendemos que aún nos falta construir una síntesis de todo lo hallado. La entrevista fue analizada en su totalidad, abarcando las respuestas a cada pregunta. Este desagregado nos brinda mucha información, sin dudas, sujeta a cada decisión y acción del docente. Los conocimientos puestos en juego están a la vista, incluso relaciones entre ellos para cada acción. Sin embargo, probablemente lograr una mirada unificadora pueda darnos una perspectiva que nos deje vislumbrar aquellos conocimientos que son clave para responder a la compleja tarea de atender un requerimiento didáctico-matemático dado.

Referencias

Camós, C., y Colombano, V. (2021). Diseño de propuestas de enseñanza bajo requerimientos didáctico-matemáticos. Un proceso de selección. *Noticiero de la UMA, 56*(2), 42-45. http://www.union-matematica.org.ar/archivo/wp-content/uploads/2021/11/Noticiero-de-la-UMA-Vol-56-N%C2%BA2-2021-5.pdf

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L., y Muñoz-Catalán, M. (2013). Determining Specialised Knowledge for Mathematics Teaching. In B. Ubuz, C. Haser & M.A. Mariotti (Eds.). *Proceedings of the CERME 8*. Middle East Technical University, Ankara, Turquía: ERME (2985-2994). http://www.mathematik.tu-dortmund.de/~erme/doc/CERME8/CERME8_2013_Proceedings.pdf

Charnay, R. (1994). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En C. Parra e I. Saiz (Eds.), *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones* (51-64). Paidós.

Escudero-Ávila, D. I., y Carrillo Yáñez, J. (2020). El Conocimiento Didáctico del Contenido: Bases teóricas y metodológicas para su caracterización como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. *Educación Matemática, 32*(2), 8-38. https://doi.org/10.24844/em3202.01

Flores-Medrano, E., Montes. M., Carrillo, J., Contreras, L., Muñoz-Catalán, M. C., y Liñán, M. M. (2016). El Papel del MTSK como Modelo de Conocimiento del

Profesor en las Interrelaciones entre los Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema*, *30*(54), 204-221.

Gómez-Chacón, I. (2017). Epistemología personal y conocimiento matemático del profesor en Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. En J. Carrillo Yáñez y L. Contreras González (Coords.), *Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (48-67).

Gómez-Chacón, I., y De la Fuente, C. (2019). Exploring teacher's epistemic beliefs and emotions in inquiry-based teaching of mathematics. In S. A. Chamberlin, B. Sriraman (Eds.), *Affect in Mathematical Modeling, Advances in Mathematics Education* (131-157). Springer Nature. https://doi.org/10.1007/978-3-030-04432-9_9

Rodríguez, M., Pochulu, M., y Fierro, M. (2019). Modelo de planos de formación docente para abordar distintos roles del profesor de matemática. *Revista Electrónica de Divulgación de Metodologías Emergentes en el Desarrollo de las STEM, 1*(1), 84-103. http://www.revistas.unp.edu.ar/index.php/rediunp/article/view/95

Rodríguez, M. (2016). Habilidades matemáticas: una aproximación teórica. *Educação Matemática Pesquisa*, *18*(2), 809-824.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Universidad Nacional de General Sarmiento (2019, julio). *Resolución 6823/18*.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., y Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del Álgebra elemental. Una propuesta alternativa*. Trillas.